L.KAYRIDINE JANOURA	**EQUATIONS ET INÉQUATIONS**	
MR : AMMAR BOUAJILA		
GSM :92 741 567	**$1^{ère}$ Année**	**Cours et application**

I. Résolution d'équations

1.1) Équations du 1er degré

Définition 1.

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité entre deux expressions algébriques contenant une seule variable de degré au plus égal à 1. Ce type d'équations peut se ramener à la forme réduite : $ax+b=0$ ou $ax=b'$.

Résoudre une équation, c'est trouver *toutes* les valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie. Ces valeurs sont les solutions de l'équation. S désigne l'ensembe des solutions.

Exemple 1. *x désigne l'inconnue. Tous les signes (=) sont alignés verticalement !*

1°) Résoudre l'équation : $5(x-1)=x+2(x+1)-8$

$5x-5 = x+2x+2-8$	On développe pour supprimer les parenthèses
$5x-5 = 3x-6$	On réduit chacun des deux membres
$5x-3x = -6+5$	On regroupe les termes de même nature
$2x = -1$	On réduit chacun des deux membres
$\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$	On simplifie
$x = \frac{-1}{2}$	

Conclusion : Cette équation admet une seule solution. On écrit : $S=\left\{\frac{-1}{2}\right\}$

Remarque : ***Il est interdit de diviser par 0.***

Exemple 2.

1°) Si on rencontre une équation du type : $0x=0$, alors ***tous*** les nombres réels sont solutions de cette équation. Donc : $S=\mathbb{R}$.

2°) Si on rencontre une équation du type : $0x=7$, ***aucun*** nombre réel n'est solution de cette équation. Donc : $S=\varnothing$, appelé l'ensemble vide !

Modifier une équation sans changer ses solutions

Si on ajoute ou retranche aux deux membres d'une équation une même valeur alors on ne modifie pas les solutions de l'équation.

$4x+5=3x+7$

$4x+10=3x+12$

On ajoute 5 à chaque membre de l'équation.

Les solutions de $4x+10=3x+12$ sont donc identiques à celles de $4x+5=3x+7$

Si on multiplie ou divise les deux membres d'une équation par une même valeur non nulle alors on ne modifie pas les solutions de l'équations

$2x=8$

$6x=24$

On multiplie par 3 chaque membre de l'équation.

Les solutions de $2x=8$ sont donc identiques à celles de $6x=24$

II Equations produit

On appelle « équation produit » une équation qui s'écrit sous la forme d'un produit de facteurs égal à zéro.

Exemple : $(2x + 3)\ (4x - 2) = 0$ est une équation produit

Théorème 1 : Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ **Théorème 2 : Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $ab = 0$**

On peut remarquer que le théorème 2 est la réciproque du théorème 1.
Ces deux théorèmes permettent de modifier une « équation produit » :

$(2x + 3)\ (4x - 2) = 0$

si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $ab = 0$

si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

$2x + 3 = 0$ ou $4x - 2 = 0$

Le fait de pouvoir passer **de « (2x + 3)(4x – 2) = 0 »** à **« 2x + 3 = 0 ou 4x – 2 = 0 »** dans les deux sens est ce qui garantit que les deux questions ci-dessous ont exactement les mêmes réponses :

« Quelles sont toutes les valeurs de x tel que (2x + 3)(4x – 2) = 0 ?»
« Quelles sont toutes les valeurs de x tel que 2x + 3 = 0 ou 4x – 2 = 0 ?»

Pratiquement, on rédigera de la façon suivante la résolution de telles équations :

$(2x + 1)(4x - 1) = 0$
$ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$
$2x + 1 = 0$ ou $4x - 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{4}$
$\boxed{S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}}$

$(x + 1)^2 = 0$
$a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$
$x + 1 = 0$
$x = -1$
$\boxed{S = \{ -1 \}}$

Remarque :

- « $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ » est une synthèse des théorèmes 1 et 2.
- « $a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$ » se déduit des théorèmes 1 et 2 en prenant $a = b$.

III Méthodologie pour la résolution d'équations

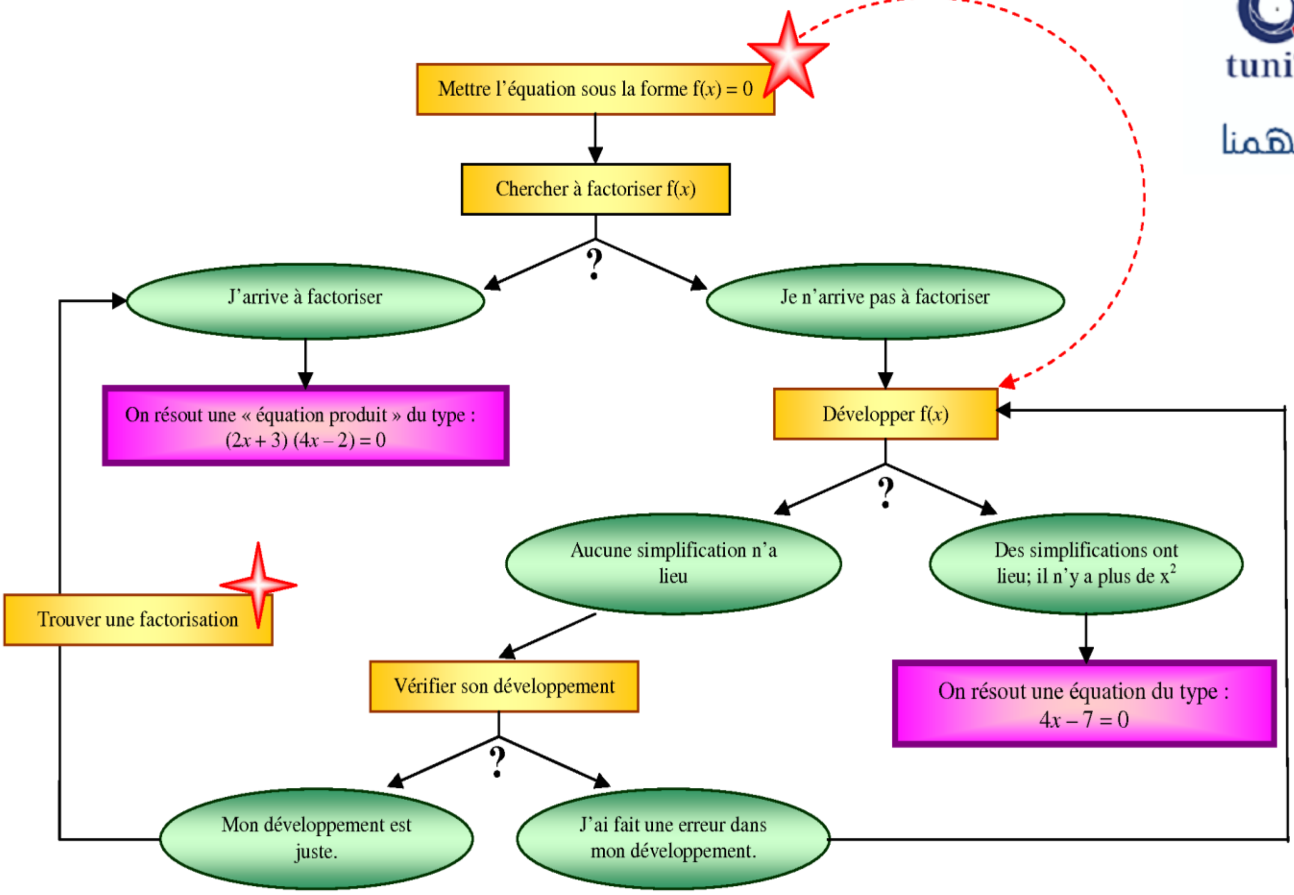
Vous pouvez maintenant résoudre les trois types d'équations suivantes :

$\frac{x}{2} + \frac{x+3}{4} + x + 5 = 0$
$\frac{2x}{4} + \frac{x+3}{4} + \frac{4x+20}{4} = 0$
$\frac{7x+23}{4} = 0$
$7x + 23 = 0$
$\boxed{S = \left\{ -\frac{23}{7} \right\}}$

$(x + 1)^2 = (2x - 1)^2 - 3x$
$x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2$
$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 1$
$2x + 1 = -4x + 1$
$6x = 0$
$x = 0$
$\boxed{S = \{ 0 \}}$

$(x + 4)^2 = 25$
$(x + 4)^2 - 25 = 0$
$[(x + 4) - 5][(x + 4) + 5] = 0$
$ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$
$x + 4 - 5 = 0$ ou $x + 4 + 5 = 0$
$x - 1 = 0$ ou $x + 9 = 0$
$\boxed{S = \{ 1 ; -9 \}}$

Le problème va donc être maintenant pour vous de savoir comment s'y prendre pour résoudre une équation : faut-il développer ?, factoriser ? … Voici un graphique qui vous guidera dans vos choix :



Cas particulier : équations de la forme $x^2 = a$

Théorème 2.

Soit a un nombre réel. On distingue trois cas :

1er cas : $a < 0$: L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution. Donc $S = \varnothing$,
Car le carré d'un nombre réel est positif ou nul

2ème cas : $a = 0$: L'équation $x^2 = 0$ admet une solution unique $x = 0$. Donc $S = \{0\}$

3ème cas : $a > 0$: L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.
Donc $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

Équations-quotients

Définition 3.

Une équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$) s'appelle une ***équation-quotient***.

Théorème 3.

Pour tout nombre réel x tel que $Q(x) \neq 0$, on a :
l'équation $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à [$P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$].

Exemple 4.

L'équation (E) : $\dfrac{2x^2-8}{x-2}=0$ est une équation-quotient.

Avant de résoudre cette équation, il faut chercher les valeurs qui annulent $Q(x)$.

Ce sont les valeurs telles que $Q(x)=0$ qu'on appelle ***les valeurs interdites***.

$$Q(x)=0 \iff x-2=0$$
$$\iff x=2$$

On obtient ainsi le domaine de définition de l'équation (E) : $D_E=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Par conséquent, pour tout $x\neq 2$ on a :

L'équation $\dfrac{2x^2-8}{x-2}=0$ équivaut à $2x^2-8=0$ (Je factorise par 2)

Donc $2(x^2-4)=0$ (J'obtiens une I.R.n°3 que je factorise aussi)

Donc $2(x-2)(x+2)=0$ donc d'après le théorème du produit nul on a :

$2=0$ ou $x-2=0$ ou $x+2=0$

Or $2\neq 0$ donc $x=2$ ou $x=-2$.

Mais, $x=2$ est une valeur interdite, donc cette équation n'admet qu'une seule solution $x=-2$.

Conclusion : $S=\{-2\}$.

1.5) Mise en équation d'un problème

Exemple 5.

Lors d'un match de football dans un village, il y avait 1000 spectateurs. Les spectateurs assis dans les tribunes paient 10 D le billet d'entrée. Les spectateurs debout derrière les grilles paient 5 D le billet d'entrée. La recette totale du match est de 8270 D

Calculer le nombre de spectateurs de chaque catégorie.

1ère étape : Choisir et nommer l'inconnue.

On appelle x le nombre de spectateurs assis. (On peut choisir les spectateurs debout)

2ème étape : Calculer l'autre inconnue en fonction de x s'il y a lieu.

On sait qu'il y a 1000 spectateurs au total et x spectateurs assis.

Donc, il y a $(1000-x)$ spectateurs debout.

3ème étape : Traduire les données du problème par une équation ou une inéquation :

On sait que :

Recette spectateurs assis + Recette spectateurs debout = Recette totale

Donc : $10\times x+5\times(1000-x)=8270$

4ème étape : Résoudre l'équation ou l'inéquation algébriquement :

$$10x+5(1000-x)=8270$$
$$10x+5000-5x=8270$$
$$10x-5x=8270-5000$$
$$5x=3270$$
$$\frac{5x}{5}=\frac{3270}{5}$$

Donc $x=654$

Par conséquent, cette équation admet une seule solution : $x=654$.

5ème étape : Traduire le résultat en langage courant et conclure en répondant à la question posée.

$x=654$ Donc $1000-x=1000-654=346$

Conclusion : Il y avait 654 spectateurs assis et 346 spectateurs debout.

INEQUATIONS

Voici une inéquation : $4x + 5 \leq x - 2$

x est **l'inconnue** de l'inéquation (la valeur que l'on cherche à déterminer)

Le membre de gauche de l'inéquation est $4x + 5$. **Le membre de droite** est $x - 2$

Résoudre l'inéquation $4x + 5 \leq x - 2$, c'est répondre à la question :

«Quelles sont toutes les valeurs de x pour lesquelles on a $4x + 5 \leq x - 2$? »

I Modifier une inéquation sans changer ses solutions

Si on <u>ajoute ou retranche</u> aux deux membres d'une inéquation <u>une même valeur</u> alors on ne modifie pas les solutions de l'inéquation.

$4x + 5 \leq 3x + 7$

$4x + 10 \leq 3x + 12$

On ajoute 5 à chaque membre de l'inéquation.

Les solutions de $4x + 5 \leq 3x + 7$ sont donc identiques à celles de $4x + 10 \leq 3x + 12$.

Si on <u>multiplie ou divise</u> les deux membres d'une inéquation par <u>une même valeur strictement POSITIVE</u> alors on ne modifie pas les solutions de l'inéquation.

$2x > 8$

$6x > 24$

On multiplie par 3 chaque membre de l'inéquation.

Les solutions de $2x > 8$sont donc identiques à celles de $6x > 24$.

Si on <u>multiplie ou divise</u> les deux membres d'une inéquation par <u>une même valeur strictement NEGATIVE</u> en changeant le sens de l'inéquation, alors on ne modifie pas les solutions de l'inéquation.

$-4x \leq 6$

$2x \geq -3$

On divise par -2 chaque membre de l'inéquation en changeant le sens de l'inéquation.

Les solutions de $-4x \leq 6$ sont donc identiques à celles de $2x \geq -3$.

II Résoudre une inéquation

Pour résoudre une inéquation, on cherche à trouver une autre inéquation la plus simple possible qui a les mêmes solutions.

Remarque : la méthode de résolution des inéquations est semblabe à celle de la résolution des équations.

Inéquation à résoudre : $4x + 5 \leq x - 2$

Inéquation 2 : $4x \leq x - 7$ (on a retranché 5 à chaque membre)

Inéquation 3 : $3x \leq -7$ (on a retranché x à chaque membre)

Inéquation 4 : $x \leq \frac{-7}{3}$ (on a divisé par un nombre positif chaque membre)

Les inéquations 1, 2, 3, 4 ont exactement les mêmes solutions car on a utilisé des règles autorisées.

L'inéquation 4 permet de les trouver facilement : ce sont tous les nombres inférieurs ou égal à $\frac{-7}{3}$

Pratiquement on rédigera de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
4x+5 &\leq x-2 \\
4x+5-5 &\leq x-2-5 \\
4x &\leq x-7 \\
4x - x &\leq x-7-x \\
3x &\leq -7 \\
\frac{3x}{3} &\leq \frac{-7}{3} \\
x &\leq \frac{-7}{3}
\end{aligned}$$

On essaiera de mettre les symboles ≤ les uns en dessous des autres pour plus de lisibilité.

On ne change pas le sens de l'inégalité car on divise par 3 qui est positif. Peu importe le signe de -7 !

Les solutions sont donc tous les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{-7}{3}$ N'oubliez pas la phrase de conclusion.

III Représentation graphique des solutions

Reprenons l'exemple précédent. On peut représenter graphiquement ses solutions.
Il suffit pour cela d'utiliser un axe orienté et de colorier les solutions :

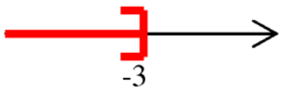
Il est indispensable de rajouter « **solutions** » au dessus de ce que vous coloriez. Il existe d'autres façons de représenter graphiquement des solutions et le lecteur n'est pas censé deviner la votre.

Ensuite, il faut indiquer plus clairement que -7/3 est solution.
On utilise alors le crochet] car il est tourné vers les solutions.

Autres exemples :

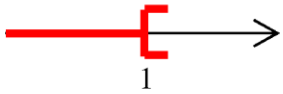
$$\begin{aligned}
-3x-4 &\geq 5 \\
-3x &\geq 9 \\
x &\leq -3
\end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -3.



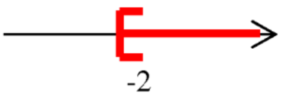
$$\begin{aligned}
2x+3 &> 6x-1 \\
3 &> 4x-1 \\
4 &> 4x \\
1 &> x
\end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres strictement plus petit que 1.



$$\begin{aligned}
-2x-5 &\leq -1 \\
-2x &\leq 4 \\
x &\geq -2
\end{aligned}$$

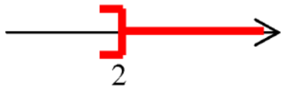
Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -2.



-2 est solution donc le crochet est tourné vers les solutions

$$\begin{aligned}
2x+1 &> 5 \\
2x &> 4 \\
x &> 2
\end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres strictement plus grand que 2.



2 n'est pas solution donc le crochet n'est pas tourné vers les solutions

Signe du binôme

I) Définition

Un binôme est une expression de la forme : $ax + b$ avec a et b réels

Exemple :

$7x+3$ $4x-5$ $7-3x$ $-2x$ x
sont des binômes

Exemple. Etudions le signe de $3x-5$ ($a=3, b=-5$).

- $3x-5=0 \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$. Donc : si $x=\frac{5}{3}$, le binôme s'annule.
- $3x-5>0 \Leftrightarrow 3x>5 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$. Donc : si $x>\frac{5}{3}$, le binôme est strictement positif.
- $3x-5<0 \Leftrightarrow 3x<5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{3}$. Donc : si $x<\frac{5}{3}$, le binôme est strictement négatif.

On résume ces résulats dans un ***tableau du signe*** du binôme :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$	0	$+$	

En général :

- ***Etude du signe de $ax+b$ lorsque $a>0$***
  - $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$. Donc : si $x=-\frac{b}{a}$, le binôme s'annule.
  - $ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Longleftrightarrow x>-\frac{b}{a}$. Donc : si $x>-\frac{b}{a}$ le binôme est strictement positif.
  - $ax+b<0 \Leftrightarrow ax<-b \Longleftrightarrow x<-\frac{b}{a}$. Donc : si $x<-\frac{b}{a}$ le binôme est strictement négatif.

- ***Etude du signe de $ax+b$ lorsque $a<0$***
  - $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$. Donc : si $x=-\frac{b}{a}$, le binôme s'annule.
  - $ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Longleftrightarrow x<-\frac{b}{a}$. Donc : si $x<-\frac{b}{a}$ le binôme est strictement positif.
  - $ax+b<0 \Leftrightarrow ax<-b \Longleftrightarrow x>-\frac{b}{a}$. Donc : si $x>-\frac{b}{a}$ le binôme est strictement négatif.

On résume donc ces résultats ci dessous

Le signe du binôme $ax+b$ est le même que celui de a sur $[-\frac{b}{a}\,;+\infty[$ et il est l'opposé de celui de a sur $]-\infty;-\frac{b}{a}]$

2) Tableau de signe du binôme $ax+b$:

a) Cas où $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

b Cas où $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Remarque. Il faut bien distinguer entre les cas $a>0$ et $a<0$. En pratique, on commence par regarder le signe de a, puis on utilise les résultats ci-dessus. Retenons que le signe de a se trouve toujours à droite dans le tableau du signe de $ax+b$.

exemples

Exemple 1 : coefficient de x positif

Etudier le signe de $3x-6$ selon les valeurs de x

- Valeur de x annulant $3x-6$:

$3x-6=0 \iff 3x=6 \iff x=2$

$3x-6$ **s'annule pour** $x=2$

- Tableau de signes (ici $a=3$ et $b=-6$) :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$ signe de $-a=$	0	$+$ signe de a	

Exemple 2 : coefficient de x négatif

Etudier le signe de $-5x-8$ selon les valeurs de x ($x\in\mathbb{R}$)

- Valeur de x annulant $-5x-8$:

$-5x-8=0 \iff -5x=8 \iff x=\frac{8}{-5}=\frac{-8}{5}$

$-5x-8$ **s'annule pour** $x=\frac{-8}{5}$

- Tableau de signes (ici $a=-5$ et $b=-8$) :

x	$-\infty$		$\frac{-8}{5}$		$+\infty$
$-5x-8$		$+$ signe de $-a$	0	$-$ signe de a	

Inéquations-produits

a) *Résolution algébrique*

Résoudre une inéquation, revient à déterminer le signe d'une expression algébrique.

Méthode 1.

Pour étudier le signe d'une expression algébrique, il suffit de factoriser l'expression, étudier le signe de chaque facteur, puis appliquer la règle des signes d'un produit dans un tableau de signes.

Exemple 1. Résoudre l'inéquation $(2x-3)(x+1) \leqslant (2x-3)(3x-3)$ (1)

1ère étape : je passe tout à gauche : $(2x-3)(x+1)-(2x-3)(3x-3) \leqslant 0$

2ème étape : je factorise : $(2x-3)(x+1)-(2x-3)(3x-3) \leqslant 0$

donc : $(2x-3)[(x+1)-(3x-3)] \leqslant 0$

Je supprime les parenthèses et je gère correctement le signe « – » :

$(2x-3)[x+1-3x+3] \leqslant 0$

J'obtiens une expression factorisée : $(2x-3)(-2x+4) \leqslant 0$ (*)

3ème étape : j'étudie le signe de chaque facteur :

4ème étape : Je fais un tableau de signes pour connaître le signe du produit

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$	Variations de x
$2x-3$		–	0	+	$\vert$	+		Signe de $(2x-3)$
$-2x+4$		+	$\vert$	+	0	–		Signe de $(-2x+4)$
$(2x-3)(-2x+4)$		–	**0**	+	**0**	–		Signe du produit

En résumé : Signe du produit :

1. Le produit s'annule pour $x=\frac{3}{2}$ ou $x=2$. (on le savait déjà!)
2. Le produit est positif si, et seulement si, $\frac{3}{2}<x<2$.
3. Le produit est négatif si, et seulement si, $x<\frac{3}{2}$ ou $x>2$.

5ème étape : je réponds à la question. D'après (*), je cherche sur quel intervalle, cette expression est négative ou nulle ;

$$x<\frac{3}{2} \text{ ou } x>2.$$

6ème étape : Conclure.

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S =]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\,] \cup [2\,;+\infty[$.

b) *Résolution graphique*

Chaque expression peut correspondre à une fonction. Chaque fonction peut être représentée par une courbe représentative.
Résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$, revient à déterminer la position relative des courbes de f et de g.

Méthode 2.

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$, il suffit charcher les abscisses des points d'intersection des deux courbes [résoudre $f(x) = g(x)$] et déterminer toutes les valeurs de x, pour lesquelles la courbe de f est située en dessous de la courbe de g.

Inéquations-quotients

Dans cette partie, nous utilisons exactement les mêmes méthodes que ci-dessus, en rajoutant une condition d'existence : ***la recherche des valeurs interdites***, pour les exclure du domaine de définition de l'inéquation et de l'ensemble des solutions :

Méthode 3.

Pour étudier le signe d'une expression-quotient, il faut d'abord chercher les valeurs interdites, factoriser le numérateur et le dénominateur, étudier le signe de chaque facteur puis appliquer la règle des signes du quotient dans un tableau de signes.

Exemple 3. Résoudre l'inéquation $\dfrac{(2x-3)(-2x+4)}{(x^2-4)} \leqslant 0$ (3)

Recherche des valeurs interdites :

$x^2-4=0$ équivaut à $(x-2)(x+2)=0$

donc à $x-2=0$ ou $x+2=0$

donc à $x=2$ ou $x=-2$

Les deux valeurs interdites sont 2 et – 2. Donc le domaine de définition de l'inéquation (3) est : $D_3=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Résolution algébrique

On cherche la solution de chaque facteur de l'expression

2x-3=0 Sing que x= $\frac{3}{2}$	**-2x+4=0 Sig que x=2**	**x^2-4=0 Sig que x=2 ou x=-2**

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$	Variations de x
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		Signe de $(2x-3)$
$-2x+4$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		Signe de $(-2x+4)$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		Signe de $(x+2)$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		Signe de $(x-2)$
$\dfrac{(2x-3)(-2x+4)}{(x^2-4)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		Signe du quotient *les v.i. sont exclues*

En résumé : Signe du quotient :

4. Le quotient s'annule pour $x = \frac{3}{2}$ (car 2 est une valeur interdite)
5. Le quotient est positif si, et seulement si, $-2 < x < \frac{3}{2}$.
6. Le quotient est négatif si, et seulement si, $x < -2$ ou $x > \frac{3}{2}$ et $x \neq 2$.

Conclusion :

L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est : (l'expression est négative ou nulle) :

$$S =]-\infty\,;-2[\,\cup\,[\,\frac{3}{2}\,;2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty[$$